Dodatak

Optimizacija elektronskih kola - dodatak (3/3)

Dodatak

Tipovi problema optimizacije:

-Optimizacija u s-ravni

- Optimizacija u frekvencijskom domenu ($m=n$)

- Optimizacija u DC domenu ($m=n$)

- Optimizacija u frekvencijskom domenu ($m>n$) (najmanji p-ti stepen, $p=2$)

- Optimizacija u frekvencijskom domenu (Remezov algoritam)

- Optimizacija nelinearnih kola u jednosmernom domenu ($m<n$)

- Optimizacija sa ograničenjem

Projektovanje u s-ravni

Dodatak

Poklapanje koeficijenata

a) **Definiše se željena funkcija kola (nule i/ili polovi) $T^*(s)$**

b) **Odredi se funkcija kola u simboličkom obliku $T(s, \underline{p})$**

c) **Traže se vrednosti elemenata kola ($\underline{p}$) koje daju željenu funkciju.**

Poklapanje koeficijenata

Dodatak

a) **Definiše se željena funkcija kola (nule i/ili polovi) Recimo da želimo da funkcija kola ima polove s_1, s_2 i s_3, a da je potrebno naći vrednosti parametara kola p_1, p_2 i p_3 koji to zadovoljavaju.**

$$
\begin{aligned}
T^*(s) &= (s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)= \\
&= s^3-(s_1+s_2+s_3)s^2+(s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3)s-s_1s_2s_3= \\
&= a_3^* s^3+a_2^* s^2+a_1^* s+a_0^*
\end{aligned}
$$

b) **Odredi se funkcija kola u simboličkom obliku $T(s, \underline{p})$**

$$T(s, \underline{p})= a_3(\underline{p})\, s^3+a_2(\underline{p})\, s^2+a_1(\underline{p})\, s+a_0(\underline{p})$$

Poklapanje koeficijenata Dodatak

c) Traže se vrednosti elemenata kola koje daju željenu funkciju.

Funkcije T(s) i T*(s) biće jednake ako su im koeficijenti uz odgovarajuće stepene s jednaki.

Zato se funkcija greške definiše za svaki od koeficijenata.

$E_o = a_o(\underline{p}) - a_o^* b$
$E_1 = a_1(\underline{p}) - a_1^* b$
$E_2 = a_2(\underline{p}) - a_2^* b$
$E_3 = a_3(\underline{p}) - a_3^* b$

Poklapanje koeficijenata Dodatak

c) Traže se vrednosti elemenata kola koje daju željenu funkciju.

U opštem obliku E je nelinearna funkcija od $\underline{p}$:

$E_i = a_i(\underline{p}) - a_i^* b$, i=0, 1, 2,3.

konstanta b uvedena je kao četvrti parametar

Linearizacijom se dobija

$$E_i^{j+1} = E_i^j + \sum_{k=1}^{4} \left.\frac{\partial E_i}{\partial p_k}\right|_{p_k = p_k^j} \cdot \Delta p_k^{j+1} = 0, \qquad i = 0,1,2,3.$$

$$\sum_{k=1}^{4} \left.\frac{\partial E_i}{\partial p_k}\right|_{p_k = p_k^j} \cdot \Delta p_k^{j+1} = -E_i^j, \qquad i = 0,1,2,3.$$

Poklapanje koeficijenata Dodatak

c) Traže se vrednosti elemenata kola koje daju željenu funkciju.

$$\sum_{k=1}^{3} \left.\frac{\partial a_i(\underline{p})}{\partial p_k}\right|_{p_k = p_k^j} \cdot \Delta p_k^{j+1} - a_i^* \Delta b^{j+1} = -E_i^j, \qquad i = 0,1,2,3.$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial a_0}{\partial p_1} & \frac{\partial a_0}{\partial p_2} & \frac{\partial a_0}{\partial p_3} & -a_0^* \\ \frac{\partial a_1}{\partial p_1} & \frac{\partial a_1}{\partial p_2} & \frac{\partial a_1}{\partial p_3} & -a_1^* \\ \frac{\partial a_2}{\partial p_1} & \frac{\partial a_2}{\partial p_2} & \frac{\partial a_2}{\partial p_3} & -a_2^* \\ \frac{\partial a_3}{\partial p_1} & \frac{\partial a_3}{\partial p_2} & \frac{\partial a_3}{\partial p_3} & -a_3^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta p_1^{j+1} \\ \Delta p_2^{j+1} \\ \Delta p_3^{j+1} \\ \Delta b^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_0(\underline{p}^j) + b^j a_0^* \\ -a_1(\underline{p}^j) + b^j a_1^* \\ -a_2(\underline{p}^j) + b^j a_2^* \\ -a_3(\underline{p}^j) + b^j a_3^* \end{bmatrix}$$

Poklapanje koeficijenata Dodatak

c) Traže se vrednosti elemenata kola koje daju željenu funkciju.

rešavanjem ovog sistema jednačina određuju se vrednosti Δp_k^{j+1} i Δb^{j+1};

proverava se konvergencija:

ukoliko kriterijumi nisu zadovoljeni, ažuriraju se vrednosti parametara $p_k^j = p_k^j + \Delta p_k^{j+1}$, k=1, 2, 3 i $b^j = b^j + \Delta b^{j+1}$ i nastavlja se sa iterativnim postupkom;

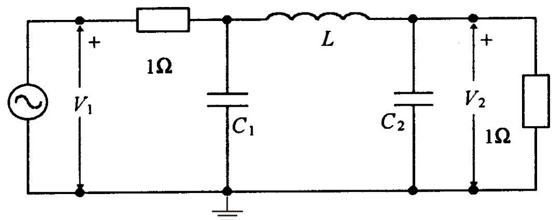
ukoliko su kriterijumi zadovoljeni optimizacija je završena.

Dodatak

Poklapanje koeficijenata

Primer:

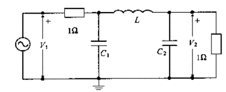
Odrediti vrednosti elemenata C_1, C_2 i L u kolu sa slike, tako da funkcija prenosa ima polove definisane sa $s_1=-1$, $s_{2,3}=-0.5\pm j\sqrt{1.5}$



Dodatak

Poklapanje koeficijenata

Primer:



a) Definisanje željene funkcije kola

$T^*(s) = (s-s_1)\,(s-s_2)\,(s-s_3)$

$T^*(s) = (s+1)(s+0.5-j\,(1,5)^{1/2})\,(s+0.5+j\,(1,5)^{1/2}) =$

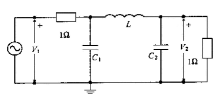
$= 1.75 + 2.75s + 2s^2 + 1s^3$

$a_o^* = 1.75;$ $a_1^* = 2.75;$ $a_2^* = 2;$ $a_3^* = 1.$

Dodatak

Poklapanje koeficijenata

Primer:



$a_o^* = 1.75;$ $a_1^* = 2.75;$ $a_2^* = 2;$ $a_3^* = 1.$

b) Određivanje funkcija kola u simboličkom obliku T(s, p)

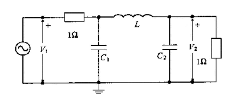
$T(s,\underline{p}) = 2\Gamma + [1+\Gamma(C_1+C_2)]s + (C_1+C_2)s^2 + C_1C_2s^3$

$a_0 = 2\Gamma$ $a_1 = 1+\Gamma(C_1+C_2)$ $a_2 = C_1+C_2$ $a_3 = C_1C_2$

Dodatak

Poklapanje koeficijenata

Primer:



$a_o^* = 1.75;$ $a_1^* = 2.75;$ $a_2^* = 2;$ $a_3^* = 1.$

$a_0 = 2\Gamma$ $a_1 = 1+\Gamma(C_1+C_2)$ $a_2 = C_1+C_2$ $a_3 = C_1C_2$

$E_i = a_i(\underline{p}) - a_i^* b$, $i=0, 1, 2, 3.$

$E_o = 2\Gamma - 1.75b;$

$E_1 = 1+\Gamma(C_1+C_2) - 2.75b;$

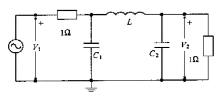
$E_2 = (C_1+C_2) - 2b;$

$E_3 = C_1C_2 - 1b.$

Dodatak

Poklapanje koeficijenata

Primer:



c) Određivanje vrednosti parametara kola

1. Određivanje početnog rešenja

2. Izračunavanje funkcije greške

$a_o^*=1.75$; $a_1^*=2.75$; $a_2^*=2$; $a_3^*=1.$

$a_o=2\Gamma$; $a_1=1+\Gamma(C_1+C_2)$ $a_2=C_1+C_2$; $a_3=C_1C_2$

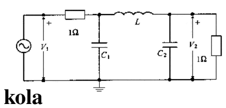
$E_o=2\Gamma-1.75b$;
$E_1=1+\Gamma(C_1+C_2)-2.75b$;
$E_2=(C_1+C_2)-2b$;
$E_3=C_1C_2-1b$

Algoritam optimizacije

Dodatak

Poklapanje koeficijenata

Primer:



c) Određivanje vrednosti parametara kola

3. Provera konvergencije

4. Izračunavanje korekcije parametara

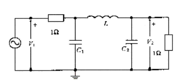
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1,75 \\ \Gamma^j & \Gamma^j & C_1^j+C_2^j & -2,75 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ C_2^j & C_1^j & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_1^j \\ \Delta C_2^j \\ \Delta \Gamma^j \\ \Delta b^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,75\cdot b^j-2\cdot\Gamma^j \\ 2,75\cdot b^j-1-\Gamma(C_1^j+C_2^j) \\ 2\cdot b^j-C_1^j-C_2^j \\ b_j-C_1^jC_2^j \end{bmatrix}$$

Algoritam optimizacije

Dodatak

Poklapanje koeficijenata

Primer:



c) Određivanje vrednosti parametara kola

5. Korekcija vrednosti parametara

Itera-cija	C_1	C_2	$1/L$	b
0	1.0	1.0	1.0	1.0
1	0.75	0.75	1.25	1.25
2	1.3	0.4375	1.8	1.6
3	0.877849	0.825379	0.746475	0.893114
4	0.302122	0.701115	1.015043	1.100...
5	1.978034	0.692279	0.904939	1.034216
6	1.470940	0.333717	0.877071	1.002355
7	1.234339	0.765085	0.875041	1.000112
8	1.311756	0.833335	0.875000	1.000000
[illegible]	[illegible]	0.841415	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.875	1.0
[illegible]	[illegible]	[illegible]		
[illegible]	[illegible]	[illegible]		
[illegible]	[illegible]	[illegible]		
[illegible]	[illegible]	[illegible]		
[illegible]	[illegible]	[illegible]		
[illegible]	[illegible]	[illegible]		
[illegible]	[illegible]	[illegible]		
[illegible]	[illegible]	[illegible]		
[illegible]	[illegible]	[illegible]		

Algoritam optimizacije

Dodatak

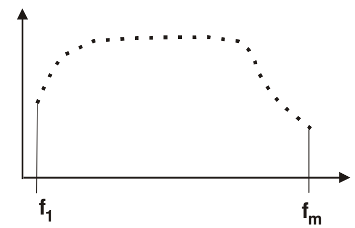
Algoritam optimizacije

Tipovi problema:

- **-Optimizacija u s-ravni**
- **- Optimizacija u frekvencijskom domenu (*m=n*)**
- **- Optimizacija u DC domenu (*m=n*)**
- **- Optimizacija u frekvencijskom domenu (m>n) (najmanji p-ti stepen, p=2)**
- **- Optimizacija u frekvencijskom domenu (Remezov algoritam)**
- **- Optimizacija nelinearnih kola u jednosmernom domenu (m<n)**
- **- Optimizacija sa ograničenjem**

Projektovanje u frekvencijskom domenu
broj parametara manji od broja uslova, *n<m*
Metod najmanje srednjekvadratne greške
(najmanjeg p-tog stepena za p=2)

Frekvencijska karakteristika zadata u mnogo tačaka m>>n



Projektovanje u frekvencijskom domenu
broj parametara manji od broja uslova, *n<m*

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \mathbf{w}(\mathbf{f}_i)\left[\mathbf{F}^*(\mathbf{f}_i) - \mathbf{F}(\mathbf{f}_i, \underline{\mathbf{p}})\right] \right\}^2 = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{e}_i^{\,2}$$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{w}(\mathbf{f}_i)\left[\mathbf{F}^*(\mathbf{f}_i) - \mathbf{F}(\mathbf{f}_i, \underline{\mathbf{p}})\right]$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{p}_k} = \mathbf{0}, \quad k = 1, \ldots, n$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{p}_k} = \sum_{i=1}^{m} 2\mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \mathbf{p}_k} = \mathbf{g}_k(\underline{\mathbf{p}}), \quad k = 1, \ldots, n$$

Linearizacija nelinearne funkcije $\mathbf{g}_k(\underline{\mathbf{p}})$:

$$\mathbf{g}_k(\underline{\mathbf{p}}^{j+1}) = \mathbf{g}_k(\underline{\mathbf{p}}^{j}) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{g}_k(\underline{\mathbf{p}}^{j})}{\partial \mathbf{p}_l} \Delta \mathbf{p}_l^{j+1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k = 1, \ldots, n}$$

Projektovanje u frekvencijskom domenu
broj parametara manji od broja uslova, *n<m*

$$\mathbf{g}_k(\underline{\mathbf{p}}^{j+1}) = \mathbf{g}_k(\underline{\mathbf{p}}^{j}) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{g}_k(\underline{\mathbf{p}}^{j})}{\partial \mathbf{p}_l} \Delta \mathbf{p}_l^{j+1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k = 1, \ldots, n}$$

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{g}_k(\underline{\mathbf{p}}^{j})}{\partial \mathbf{p}_l} \Delta \mathbf{p}_l^{j+1} = -\mathbf{g}_k(\underline{\mathbf{p}}^{j}), \quad \mathbf{k = 1, \ldots, n}$$

$$\sum_{l=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} 2 \frac{\partial \mathbf{e}_i(\underline{\mathbf{p}}^{j})}{\partial \mathbf{p}_k} \frac{\partial \mathbf{e}_i(\underline{\mathbf{p}}^{j})}{\partial \mathbf{p}_l} \Delta \mathbf{p}_l^{j+1} + \sum_{i=1}^{m} 2\mathbf{e}_i(\underline{\mathbf{p}}^{j}) \frac{\partial^2 \mathbf{e}_i(\underline{\mathbf{p}}^{j})}{\partial \mathbf{p}_k \partial \mathbf{p}_l} \Delta \mathbf{p}_l^{j+1} \right\} =$$
$$= -\sum_{i=1}^{m} 2\mathbf{e}_i(\underline{\mathbf{p}}^{j}) \frac{\partial \mathbf{e}_i(\underline{\mathbf{p}}^{j})}{\partial \mathbf{p}_k}$$

Projektovanje u frekvencijskom domenu
broj parametara manji od broja uslova, *n<m*

$$\sum_{l=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{e}_i(\underline{\mathbf{p}}^{j})}{\partial \mathbf{p}_k} \frac{\partial \mathbf{e}_i(\underline{\mathbf{p}}^{j})}{\partial \mathbf{p}_l} \Delta \mathbf{p}_l^{j+1} \right\} = -\sum_{i=1}^{m} \mathbf{e}_i(\underline{\mathbf{p}}^{j}) \frac{\partial \mathbf{e}_i(\underline{\mathbf{p}}^{j})}{\partial \mathbf{p}_k}, \quad \mathbf{k = 1, \ldots, n}$$

$$\sum_{l=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \mathbf{w}^2(\mathbf{f}_i) \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{f}_i, \underline{\mathbf{p}}^{j})}{\partial \mathbf{p}_k} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{f}_i, \underline{\mathbf{p}}^{j})}{\partial \mathbf{p}_l} \right) \Delta \mathbf{p}_l^{j+1} \right\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \mathbf{w}^2(\mathbf{f}_i) \left[\mathbf{F}^*(\mathbf{f}_i) - \mathbf{F}(\mathbf{f}_i, \underline{\mathbf{p}}^{j})\right] \mathbf{e}_i(\underline{\mathbf{p}}^{j}) \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{f}_i, \underline{\mathbf{p}}^{j})}{\partial \mathbf{p}_k} \right), \quad \mathbf{k = 1, \ldots, n}$$

Sistem od nxn linearnih jednačina

Dodatak

Algoritam optimizacije

Tipovi problema:

-*Optimizacija u s-ravni*

- Optimizacija u frekvencijskom domenu (*m=n*)

- Optimizacija u DC domenu (*m=n*)

- Optimizacija u frekvencijskom domenu (m>n) (najmanji p-ti stepen, p=2)

- Optimizacija u frekvencijskom domenu (Remezov algoritam)

- Optimizacija nelinearnih kola u jednosmernom domenu (m<n)

- Optimizacija sa ograničenjem

Dodatak

Projektovanje u frekvencijskom domenu
Čebiševljeva aproksimacija - Remezov algoritam

Amplitudska funkcija zadata kontinualno u intervalu $[f_d, f_g]$

Aprokimaciona funkcija takođe zadata kontinualno, tako da je maksimalno odstupanje u intervalu minimalno; (Čebiševljeva funkcija) $[f_d, f_g]$.

Funkcija greške definisana je sa:

$$E^j = \max_{f_d < f < f_g} \left\{ w(f) \left| F^*(f) - F(f, \underline{p}^j) \right| \right\}$$

Rešenje iz prethodne iteracije treba da obezbedi *n* promena znaka funkcije greške, gde je *n* broj parametara.

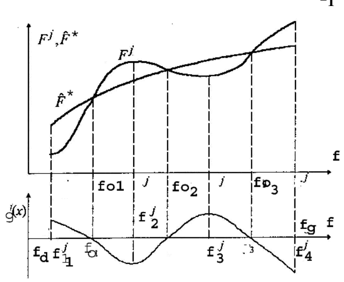
Na taj način funkcija greške imaće *n*+1 tačku sa maksimalnom greškom (ekstremalne tačke), računajući i tačke na granici intervala.

Dodatak

Projektovanje u frekvencijskom domenu
Čebiševljeva aproksimacija - Remezov algoritam

Ekstremalne tačke su f_k, k=1, ..., *n*+1

$f_1=f_d$,..., $f_{n+1}=f_g$



Dodatak

Projektovanje u frekvencijskom domenu
Čebiševljeva aproksimacija - Remezov algoritam

Ekstremalne tačke su f_k, k=1, ..., *n*+1

$$f_k^{\,j} = \begin{bmatrix} f_1^{\,j} = f_d \\ f_2^{\,j} \\ \vdots \\ f_{n+1}^{\,j} = f_g \end{bmatrix}, \quad f_1^{\,j} = f_d < f_2^{\,j} < \ldots < f_{n+1}^{\,j} = f_g$$

Traži se da vrednost greške u ekstremalnim tačkama bude ε.

Tada je $F^*(f_k) - F(f_k, \underline{p}^j) = (-1)^k \varepsilon$, k=1,..., n+1.

$$F^*(f_k) - F(f_k, \underline{p}^j) - (-1)^k \varepsilon = g(f_k, \underline{p}^j) = 0, \quad k=1,..., n+1.$$

Dodatak

Projektovanje u frekvencijskom domenu

Čebiševljeva aproksimacija - Remezov algoritam

$$g(f_k, \underline{p}) = F^*(f_k) - F(f_k, \underline{p}) - (-1)^k \boldsymbol{\varepsilon} = 0, \quad k=1,\dots, n+1.$$

Linearizacijom g_k dobija se:

$$g_k(\underline{p}^{j+1}) = g_k(\underline{p}^{j}) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial g_k(\underline{p}^{j})}{\partial p_l}\Delta p_l^{j+1} + \frac{\partial g_k(\underline{p}^{j})}{\partial \varepsilon}\Delta \varepsilon^{j+1} = 0,$$

$$k = 1, \dots, n+1$$

$$-\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial F(f_k, \underline{p}^{j})}{\partial p_l}\Delta p_l^{j+1} - (-1)^k \Delta\varepsilon^{j+1} = -F^*(f_k) + F(f_k, \underline{p}^{j}) + (-1)^k \varepsilon^{j},$$

$$k = 1, \dots, n+1$$

Rešavanjem ovog sistema od n+1 jednačine određuju se priraštaji *n* parametara Δp_k^{j+1} i $\Delta\varepsilon^{j+1}$.

Dodatak

Projektovanje u frekvencijskom domenu

Čebiševljeva aproksimacija - Remezov algoritam

Malom modifikacijom može da se fiksira vrednost greške, ali se ostavlja nedefinisana jedna granica intervala

$$g(f_k, \underline{p}) = F^*(f_k) - F(f_k, \underline{p}) - (-1)^k \boldsymbol{\varepsilon} = 0, \quad k=1,\dots, n.$$

$$g_k(\underline{p}^{j+1}) = g_k(\underline{p}^{j}) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial g_k(\underline{p}^{j})}{\partial p_l}\Delta p_l^{j+1} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

$$-\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial F(f_k, \underline{p}^{j})}{\partial p_l}\Delta p_l^{j+1} = -F^*(f_k) + F(f_k, \underline{p}^{j}) + (-1)^k \varepsilon, \quad k = 1, \dots, n$$

Rešavanjem ovog sistema od *n* jednačina određuju se priraštaji *n* parametara Δp_k^{j+1}.

Dodatak

Projektovanje u frekvencijskom domenu

Čebiševljeva aproksimacija - Remezov algoritam

Početno rešenje za vrednosti parametzara mora da obezbedi *n* promena znaka funkcije greške. Kako naći te vrednosti?

Odredi se *n* ekvidistantnih tačaka u intervalu $[f_d, f_g]$

$$f_{oi} = \frac{f_g - f_d}{2n}(2i+1), \quad i = 1, \dots, n$$

Definiše se nova funkcija greške

$$e_i(\underline{p}) = F^*(f_{oi}) - F(f_{oi}, \underline{p}) = 0, \quad k=1,\dots, n.$$

Linearizuje se

$$e_i(\underline{p}^{j+1}) = e_i(\underline{p}^{j}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial e_i(\underline{p}^{j})}{\partial p_k}\Delta p_k^{j+1} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Dodatak

Projektovanje u frekvencijskom domenu

Čebiševljeva aproksimacija - Remezov algoritam

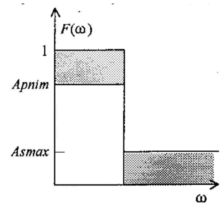
$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F(f_{oi}, \underline{p}^{j})}{\partial p_k}\Delta p_k^{j+1} = -F^*(f_{oi}) + F(f_{oi}, \underline{p}^{j}), \quad i = 1, \dots, n$$

Rešavanjem ovog sistema od *n* jednačina određuju se priraštaji *n* parametara Δp_k^{j+1} na osnovu kojih se dobijaju početna rešenja koja će obezbediti n promena znaka u tačkama f_{oi}.

Dodatak

Projektovanje u frekvencijskom domenu
Čebiševljeva aproksimacija - Remezov algoritam

Primer:



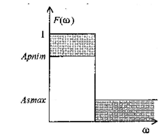
Projektovati filtar čija će amplitudska karakteristika da se nađe u osenčenom opsegu na slici.

Dodatak

Projektovanje u frekvencijskom domenu
Čebiševljeva aproksimacija - Remezov algoritam

Primer:

$$F^2(\omega,\mathbf{a})=\frac{(\omega^2-a_2^2)^2}{(\omega^2-a_2^2)^2+\alpha^2\omega^2(\omega^2-a_1^2)^2}$$



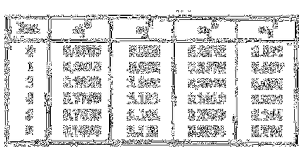
Aproksimaciona funkicija koja obezbeđuje zadovoljenje traženih uslova ako je $\alpha^2=(1/A_{pmin}{}^2-1)(1-a_2^2)^2/(1-a_1^2)^2$
a a_1 i a_2 su nepoznati parametri

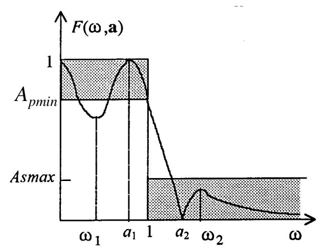
Dodatak

Projektovanje u frekvencijskom domenu
Remezov algoritam

Primer:

$F(\omega_1,\mathbf{a})=A_{pmin}$
$F(\omega_2,\mathbf{a})=A_{smax}$.





Moguće međurešenje

Za $A_{pmin}{}^2 = 0.9$ **i** $A_{smax}{}^2 = 0.05$

Dodatak

Algoritam optimizacije

Tipovi problema:

-*Optimizacija u s-ravni*

- Optimizacija u frekvencijskom domenu (*m=n*)

- Optimizacija u DC domenu (*m=n*)

- Optimizacija u frekvencijskom domenu (m>n) (najmanji p-ti stepen, p=2)

- Optimizacija u frekvencijskom domenu (Remezov algoritam)

- Optimizacija nelinearnih kola u jednosmernom domenu (m<n)

- Optimizacija sa ograničenjem

Projektovanje u DC režimu

Dodatak

Broj uslova < broja parametara $m < n$

$E_i = F^*_i - F_i(\underline{p}^j)$, $i=1,\ldots,m$.

$$E_i(\underline{p}^{j+1}) = E_i(\underline{p}^j) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial E_i(\underline{p}^j)}{\partial p_k} \Delta p_k^{j+1} = 0, \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial E_i(\underline{p}^j)}{\partial p_k} \Delta p_k^{j+1} = -E_i(\underline{p}^j), \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i(\underline{p}^j)}{\partial p_k} \Delta p_k^{j+1} = F_i^* - F_i(\underline{p}^j), \qquad i = 1, \ldots, m < n$$

Projektovanje u DC režimu; $m < n$

Dodatak

U matričnom obliku

$$\underset{\tilde{m}xn}{\Phi} \Delta \underline{p}^{j+1} = \underline{E}, \quad \Phi_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial p_k}, \quad i = 1,\ldots,m; k = 1,\ldots,n, \quad n < m$$

Izabere se m parametara i od njih se formira vektor $\Delta \underline{p}_1$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{\sim 1} & \Phi_{\sim 2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \underline{p}_1^{j+1} \\ \Delta \underline{p}_2^{j+1} \end{bmatrix} = \underline{E} = -\underline{G}, \quad \Phi_{\sim 1}\ m\ x\ m;\ \Phi_{\sim 2}\ n\ x\ (m-n) \quad n < m$$

$\Delta \underline{p}_2$ ima n-m elemenata

$$\Delta \underline{p}_1^{j+1} = -\Phi_{\sim 1}^{-1} \left[\underline{G} + \Phi_{\sim 2} \Delta \underline{p}_2^{j+1} \right] \quad \text{vektor dimenzije } m$$

Projektovanje u DC režimu; $m < n$

Dodatak

Da bi izračunali $\Delta \underline{p}_1$, treba naći $\Delta \underline{p}_2$. Zato definišemo normu

$$P(\underline{p}) = \sum_{k=1}^{n} (\Delta \underline{p}^{j+1})^2 = (\Delta \underline{p}^{j+1})^T \Delta \underline{p}^{j+1} = \left[(\Delta \underline{p}_1^{j+1})^T \quad (\Delta \underline{p}_2^{j+1})^T \right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta \underline{p}_1^{j+1} \\ \Delta \underline{p}_2^{j+1} \end{bmatrix}$$

Zamenom za $\Delta \underline{p}_1$ dobija se

$$P(\underline{p}) = \left[\left\{ -\Phi_{\sim 1}^{-1} \left[\underline{G} + \Phi_{\sim 2} \Delta \underline{p}_2^{j+1} \right] \right\}^T \quad (\Delta \underline{p}_2^{j+1})^T \right] \begin{bmatrix} -\Phi_{\sim 1}^{-1} \left[\underline{G} + \Phi_{\sim 2} \Delta \underline{p}_2^{j+1} \right] \\ \Delta \underline{p}_2^{j+1} \end{bmatrix}$$

Projektovanje u DC režimu; $m < n$

Dodatak

Minimum norme $P(\underline{p})$ dobija se za

$$\frac{\partial P(\underline{p})}{\partial (\Delta \underline{p}_2^{j+1})} = 2 \left\{ \left(\Phi_{\sim 1}^{-1} \Phi_{\sim 2} \right)^T \Phi_{\sim 1}^{-1} \left(\underline{G} + \Phi_{\sim 2} \Delta \underline{p}_2^{j+1} \right) + \Delta \underline{p}_2^{j+1} \right\} = 0$$

Odavde se dobija sistem od
$(n$-$m)$x$(n$-$m)$ linearnih jednačina po $\Delta \underline{p}_2$

$$\left\{ \left(\Phi_{\sim 1}^{-1} \Phi_{\sim 2} \right)^T \Phi_{\sim 1}^{-1} \Phi_{\sim 2} + I \right\} \Delta \underline{p}_2^{j+1} = \left(\Phi_{\sim 1}^{-1} \Phi_{\sim 2} \right)^T \Phi_{\sim 1}^{-1} \underline{G}$$

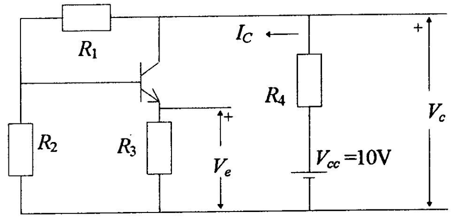
Projektovanje u DC režimu; $m < n$ Dodatak

Postupak je sledeći:

1. **Izabere se $r=n-m$ parametara koji čine $\underline{p}_2$**
2. **Matrica se razdvoji na Φ_1 i Φ_2**
3. **odredi se Δp_2 iz** $\left\{\left(\Phi_1^{-1}\Phi_2\right)^T \Phi_1^{-1}\Phi_2 + I\right\}\Delta \underline{p}_2^{j+1} = \left(\Phi_1^{-1}\Phi_2\right)^T \Phi_1^{-1}\underline{G}$
4. **odredi se Δp_1 iz** $\Delta \underline{p}_1^{j+1} = -\Phi_1^{-1}\left[\underline{G} + \Phi_2 \Delta \underline{p}_2^{j+1}\right]$

Projektovanje u DC režimu; $m < n$ Dodatak

Primer:



Odrediti R_1, R_2, R_3 i R_4 tako da bude V_c=6V i V_e=3V

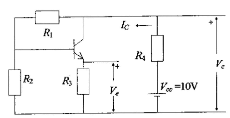
***m*=2, *n*=4**

Projektovanje u DC režimu; $m < n$ Dodatak

Primer:

$6-V_c=0$ $\quad \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial V_c}{\partial R_i}\Delta R_i = 6-V_c$

$3-V_e=0,$ $\quad \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial V_e}{\partial R_i}\Delta R_i = 3-V_e,$



$$\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{\partial V_C}{\partial R_1} & \frac{\partial V_C}{\partial R_2} & \frac{\partial V_C}{\partial R_3} & \frac{\partial V_C}{\partial R_4} \\ \frac{\partial V_e}{\partial R_1} & \frac{\partial V_e}{\partial R_2} & \frac{\partial V_e}{\partial R_3} & \frac{\partial V_e}{\partial R_4} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta R_2 \\ \Delta R_3 \\ \Delta R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-V_C \\ 3-V_e \end{bmatrix}$$

$p_1=[R_1\ R_2]^T$

$p_2=[R_3\ R_4]^T$

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-V_C \\ 3-V_e \end{bmatrix}$$

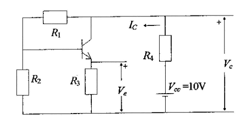
Projektovanje u DC režimu; $m < n$ Dodatak

Primer:

$p_1=[R_1\ R_2]^T$

$p_2=[R_3\ R_4]^T$

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-V_C \\ 3-V_e \end{bmatrix}$$



$$\left\{\left(\Phi_1^{-1}\Phi_2\right)^T \Phi_1^{-1}\Phi_2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \Delta R_3^{j+1} \\ \Delta R_4^{j+1} \end{bmatrix} = \left(\Phi_1^{-1}\Phi_2\right)^T \Phi_1^{-1}\begin{bmatrix} V_c-6 \\ Ve-3 \end{bmatrix}$$

Odavde se određuju ΔR_3 i ΔR_4 a zatim i ΔR_1 i ΔR_2

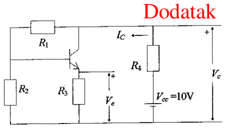
$$\begin{bmatrix} \Delta R_1^{j+1} \\ \Delta R_2^{j+1} \end{bmatrix} = -\Phi_1^{-1}\left[\begin{bmatrix} V_c-6 \\ V_e-3 \end{bmatrix} + \Phi_2 \begin{bmatrix} \Delta R_3^{j+1} \\ \Delta R_4^{j+1} \end{bmatrix}\right]$$

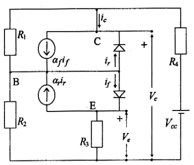
Dodatak

Projektovanje u DC režimu; $m < n$

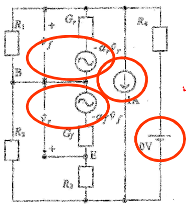
Primer:

$$\underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V_C}{\partial R_1} & \dfrac{\partial V_C}{\partial R_2} \\ \dfrac{\partial V_e}{\partial R_1} & \dfrac{\partial V_e}{\partial R_2} \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V_C}{\partial R_3} & \dfrac{\partial V_C}{\partial R_4} \\ \dfrac{\partial V_e}{\partial R_3} & \dfrac{\partial V_e}{\partial R_4} \end{bmatrix}$$

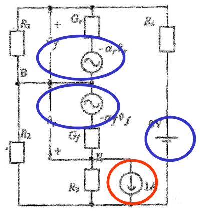




Originalno



Pridruženo za V_c



Pridruženo za V_e

Projektovanje u DC režimu; $m < n$

Dodatak

Primer:

Itera-cije	R_1	R_2	R_3	R_4
0	500000.0	50000.00	750.0000	1000.000
1	499993.2	50474.60	641.4763	853.9285
2	499993.7	50430.07	652.1177	868.2269
3	499993.6	50430.50	652.2624	868.4208
4	499993.6	50430.50	652.2627	868.4212

Iteracije	V_e	V_c
1	3.102707	5.856168
2	2.987272	6.017676
3	2.999847	6.000210
4	2.999999	6.000000